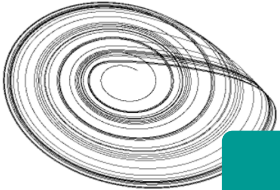
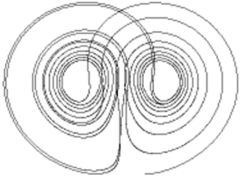


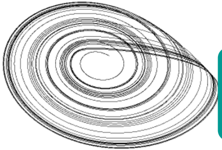
Hamilton, Lagrange, le chaos

Cette Mécanique dans nos mouvements

Fabien Buisseret

10ème Journée scientifique
pôle hainuyer
CeREF Centre de Recherche et de Formation Haute École Louvain en Hainaut
HELHa Haute École Louvain en Hainaut
UMONS Université de Mons

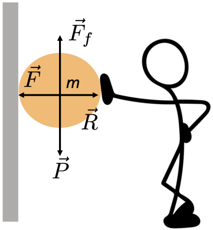




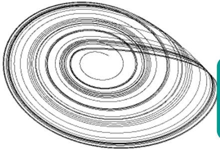
Avant-propos

Êtes-vous suffisamment Mécanique ?

- La Mécanique propose des principes mathématiques décrivant les mouvements d'objets a priori inanimés.



- Les systèmes vivants sont composés de tels objets + quelque chose de plus.
- Contrôle moteur : quels principes dynamiques régissent la réalisation de nos mouvements volontaires ?



Marcher avec Newton

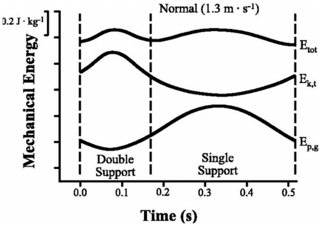
Seconde loi de Newton (1687)

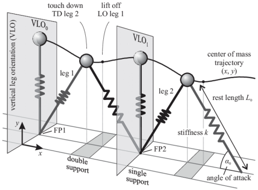
$$\sum_i \vec{F}_{\mathrm{ext},i} = m\ \vec{a}, \text{ vec } \vec{a} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}.$$

- La trajectoire $\vec{x}(t)$ est "générée" par les forces externes au départ des conditions initiales.
- L'énergie totale $E = E_k + E_p$ est constante en l'absence de force dissipatives.

Masse-ressort et marche

- La trajectoire verticale du centre de masse du corps durant la marche $\sim$ système masse-ressort inversé. [OF05, RBM$^+$10]





- Aussi applicable durant le saut et la course [Bli89].
- Notons que l'énergie n'est pas exactement conservée.

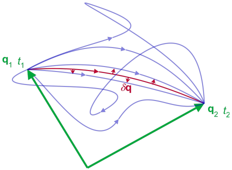
L'optimisme de Lagrange

Lagrange (1736-1813)

- Parmi toutes les trajectoires commençant en $\vec{x}_i$ et se terminant en $\vec{x}_f$, celle qui est effectivement réalisée minimise l'action $S = \int_{t_i}^{t_f} L(\vec{x}, \vec{v}, \ldots)\, dt$, soit

$$\boxed{\delta S = 0.}$$

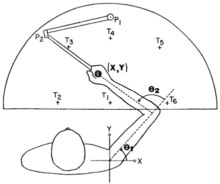
- Principe de moindre action



- Typiquement, $L = E_k - E_p$. Les ingénieurs parleraient de "fonction coût".
- Mouvement volontaire : est-ce que notre cerveau intègre une action ?
  Proposé dans la théorie du contrôle optimal [TJ02].

Jerk et tâches de pointage

- Proposition : dans un mouvement volontaire de pointage d'un point à un autre, l'action $S = \int_{t_i}^{t_f} \vec{j}^{\,2}\, dt$ est minimisée, avec le jerk $\vec{j} = \frac{d\vec{a}}{dt}$ [FH85].



- C'est une action non-standard au sens du physicien. De telles actions, contenant des dérivées de la position plus élevées que la vitesse, n'ont généralement pas de trajectoire stable. Quelques actions peuvent y mener toutefois [BBDW19].
$\rightsquigarrow$ L'étude du mouvement humain peut aussi motiver des études en mécanique "pure".

Attiré par Hamilton

Hamilton (1805-1865)

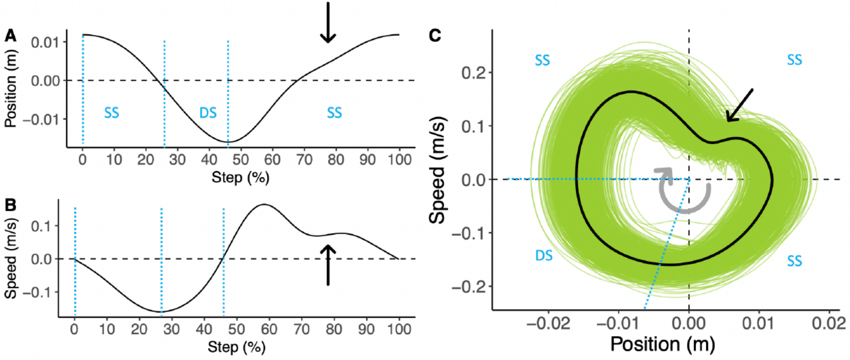
- La dynamique est formulée dans l'espace des phases $(\vec{q}, \vec{p})$ avec $\vec{q}$ les positions et $\vec{p}$ les impulsions. Le Hamiltonien H mène aux équations du mouvement, de premier ordre :

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \vec{q}}, \quad \dot{\vec{q}} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}}.$$

- Typiquement, $H = E_k + E_p$ et $\vec{p} \sim \dot{\vec{q}}$.
- Dans l'espace des phases, tous les degrés de liberté sont explicités et l'analyse des trajectoires est fondamentalement géométrique.
- Le principe de moindre action est toujours d'actualité.

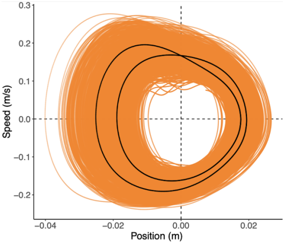
Chaos et attracteurs

- Revenons au cas d'un jeune adulte marchant durant 10 minutes sur un tapis roulant [BBD+23]



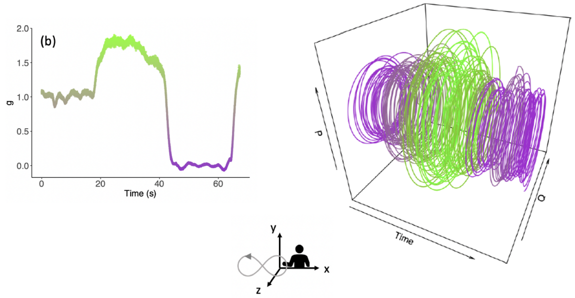
Variables d'action

- La variabilité apparaît clairement comme une variabilité "autour" d'un attracteur (en noir), qui est une sorte de motif idéal dans l'espace des phases.
- La surface d'un cycle, $I = \frac{1}{2\pi} \oint_\Gamma p \, dq$, est (presque) constante.
- Les différentes formulations de la Mécanique permettent d'éclairer le mouvement volontaire humain.

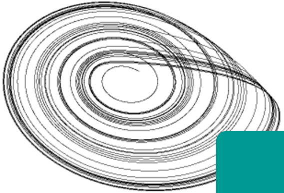


Conclusion – sans gravité

- [BBD+21] : Pour un mouvement volontaire en vol parabolique, $I(g)$ se comporte exactement comme prévu !



- Mécanismes physiologiques encore à expliquer.



Mechanics rules
– To be continued

References I

N. Boulanger, F. Buisseret, V. Dehouck, F. Dierick, and O. White, *Motor strategies and adiabatic invariants : The case of rhythmic motion in parabolic flights*, Phys. Rev. E **104** (2021), 024403.

Nicolas Boulanger, Fabien Buisseret, Victor Dehouck, Frederic Dierick, and Olivier White, *Diffusion in phase space as a tool to assess variability of vertical centre-of-mass motion during long-range walking*, Physics **5** (2023), no. 1, 168–178.

Nicolas Boulanger, Fabien Buisseret, Frederic Dierick, and Olivier White, *Higher-derivative harmonic oscillators : stability of classical dynamics and adiabatic invariants*, Eur. Phys. J. C **79** (2019), no. 1, 60.

R. Blickhan, *The spring-mass model for running and hopping*, Journal of Biomechanics **22** (1989), no. 11, 1217–1227.

T Flash and N Hogan, *The coordination of arm movements : an experimentally confirmed mathematical model*, Journal of Neuroscience **5** (1985), no. 7, 1688–1703.

References II

Justus D. Ortega and Claire T. Farley, *Minimizing center of mass vertical movement increases metabolic cost in walking*, Journal of Applied Physiology **99** (2005), no. 6, 2099–2107, PMID : 16051716.

Juergen Rummel, Yvonne Blum, H. Moritz Maus, Christian Rode, and Andre Seyfarth, *Stable and robust walking with compliant legs*, 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2010, pp. 5250–5255.

Emanuel Todorov and Michael I. Jordan, *Optimal feedback control as a theory of motor coordination*, Nature Neuroscience **5** (2002), no. 11, 1226–1235.